9 Proporcionalidad geométrica

INTRODUCCIÓN

El estudio de la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras es algo complejo para los alumnos de este nivel educativo.

Comenzamos la unidad recordando y diferenciando los conceptos básicos de las aplicaciones lineales (recta, segmento y polígono), que son el paso previo al estudio de la proporcionalidad de segmentos y a la aplicación de los criterios de semejanza de figuras, en particular de los triángulos.

Se proponen problemas sencillos de segmentos iguales y proporcionales que se originan a partir de rectas paralelas, para continuar resolviendo problemas de semejanza de figuras. Será más conveniente incidir en los criterios de semejanza de triángulos que enunciar directamente el teorema de Tales y sus aplicaciones.

Destacamos la importancia de saber interpretar una escala en un mapa o en un plano, subrayando la relación entre la distancia que medimos en centímetros o milímetros y estableciendo la distancia real.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *recta* está formada por infinitos puntos; no tiene ni principio ni final. Por dos puntos siempre pasa una recta.
- Una *semirrecta* es una recta que tiene principio pero no final.
- Un *segmento* está delimitado por dos puntos.
- Un *polígono* es una figura formada por una línea poligonal cerrada. Está compuesto por varios elementos: diagonales, ángulos, lados y vértices.
- La *suma de los ángulos* de un polígono de n lados es: $180° \cdot (n - 2)$.
- El cociente entre la medida de dos segmentos es su *razón*. Dos segmentos son proporcionales si tienen la misma razón.
- Varias rectas paralelas cortadas por rectas secantes forman *segmentos proporcionales* entre sí.
- Dos *triángulos* son *semejantes* si tienen los tres ángulos iguales, los tres lados proporcionales, o si tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual.
- Mediante la *escala numérica y gráfica* podemos calcular distancias de planos y mapas. La medida que calculamos en el mapa (cm) equivale a una distancia real (km).

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Calcular la razón de dos segmentos.	• Recta, semirrecta y segmento. • El polígono y sus elementos. Suma de los ángulos de un polígono. • Razón de dos segmentos. Segmentos proporcionales.	• Trazado de rectas, semirrectas y segmentos. • Identificación de polígonos y sus elementos. Triangulación de polígonos. • Cálculo de la razón de dos segmentos. Construcción de segmentos proporcionales.
2. Aplicar los criterios de semejanza de segmentos y triángulos.	• Segmentos iguales y proporcionales de rectas paralelas. • División de un segmento en partes iguales. • Semejanza de triángulos.	• Identificación de segmentos proporcionales en rectas paralelas. • Expresión gráfica de la división de un segmento en partes iguales. • Aplicación de los criterios de semejanza de triángulos. Resolución de problemas.
3. Leer e interpretar escalas en planos y mapas.	• Concepto de escala. • Escala numérica y escala gráfica.	• Interpretación del significado de la escala. • Cálculo de distancias. Resolución de problemas.

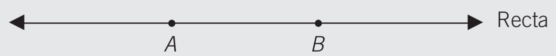
OBJETIVO 1

CALCULAR LA RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

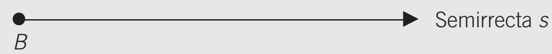
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

RECTA, SEMIRRECTA Y SEGMENTO

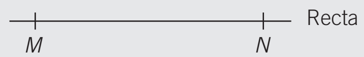
- Una **recta** es una línea continua formada por infinitos puntos, que no tiene ni principio ni final.
  – Dos puntos definen una recta.
  – Por un punto pasan infinitas rectas.



- Una **semirrecta** es una recta que tiene principio pero no final.
  Un punto cualquiera forma dos semirrectas sobre cada línea o dirección.

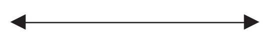


- Un **segmento** es la porción o parte de una recta delimitada por dos puntos.
  Los puntos *M* y *N* forman el segmento *MN*.



1 **Indica debajo de cada figura su nombre: recta, semirrecta o segmento.**

a) 

c) 

b) 

d)

2 **Dibuja dos puntos cualesquiera, *P* y *T*, y traza una recta *m* que pase por ellos.**

3 **Dibuja un punto *A*, traza varias rectas que pasen por él y nómbralas con letras diferentes (*r*, *s*, *t*...).**

4 **Considera un punto *F* y traza dos semirrectas, *m* y *n*, que tengan su origen en él.**

5 **Dibuja cuatro segmentos, *AB, MN, PT* y *XY*, de medidas 3, 6, 8 y 10 cm, respectivamente.**

a) *AB*

c) *PT*

b) *MN*

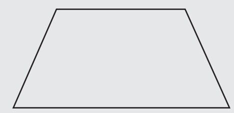
d) *XY*

POLÍGONOS

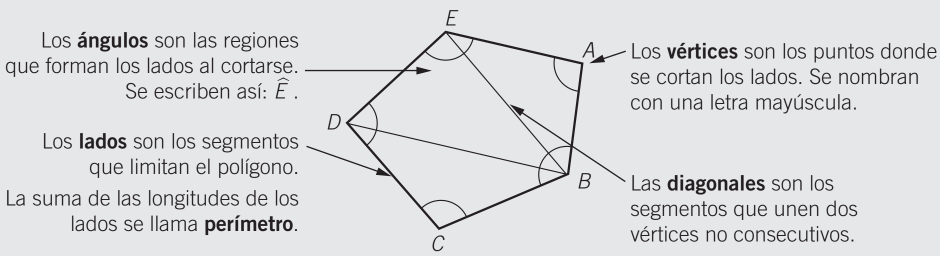
- Varios segmentos unidos entre sí forman una **línea poligonal**. Una línea poligonal cerrada es un polígono.
- Un **polígono** es una figura plana delimitada por una línea poligonal cerrada.

Línea poligonal abierta

Polígono (línea poligonal cerrada)



Elementos de un polígono



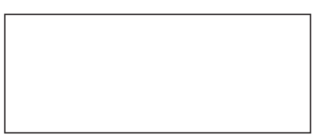
6 **Con segmentos de medidas 1, 2, 3 y 4 cm, respectivamente, dibuja una línea poligonal abierta y un polígono.**

a) Línea poligonal

b) Polígono

7 **Piensa en cuatro objetos con forma de polígono y dibújalos.**

a) Pizarra

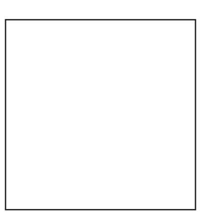


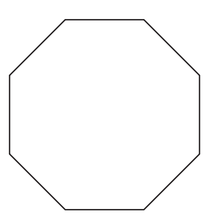
b)

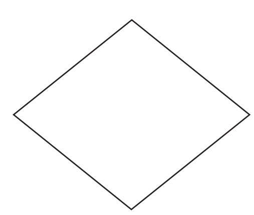
c)

d)

8 **Señala y nombra los vértices y lados de los polígonos, y dibuja los ángulos y las diagonales.**

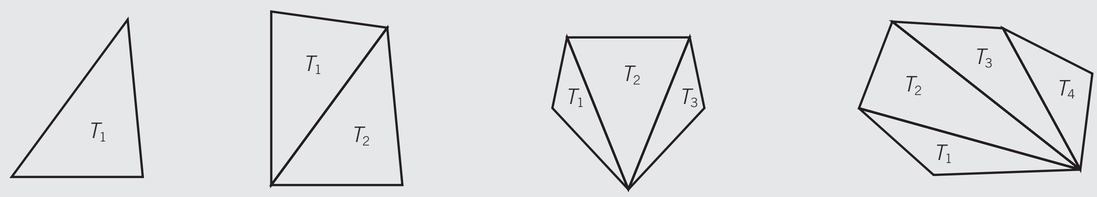






SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN POLÍGONO

- Sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Por eso, para hallar la suma de los ángulos de un polígono debemos proceder a su triangulación, mediante el trazado de diagonales desde uno de los vértices del polígono.
- La **suma de los ángulos de un polígono** se calcula sumando 180° tantas veces como triángulos tenga el polígono.



$T_1 = 180°$

$T_1 + T_2 = 180° + 180° = 360°$

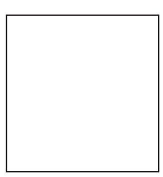
$T_1 + T_2 + T_3 = 180° + 180° + 180° = 540°$

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 180° + 180° + 180° + 180° = 720°$

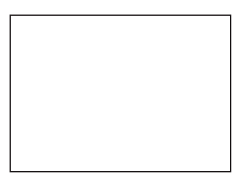
– Polígono de 3 lados: $180° \cdot (3 - 2) = 180° \cdot 1 = 180°$
– Polígono de 4 lados: $180° \cdot (4 - 2) = 180° \cdot 2 = 360°$
– Polígono de 5 lados: $180° \cdot (5 - 2) = 180° \cdot 3 = 540°$
– Polígono de 6 lados: $180° \cdot (6 - 2) = 180° \cdot 4 = 720°$
– Polígono de 7 lados: $180° \cdot (7 - 2) = 180° \cdot 5 = 900°$
– Polígono de n lados: $180° \cdot (n - 2)$

9 **Realiza la triangulación de estos polígonos, coloréalos y señala los triángulos que se forman.**

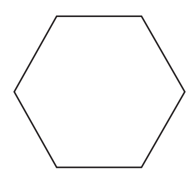
a) Cuadrado



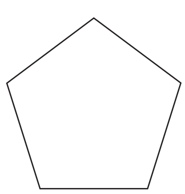
b) Rectángulo



c) Hexágono

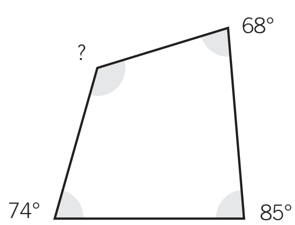


10 **Calcula el valor de cada uno de los ángulos de un pentágono regular.**

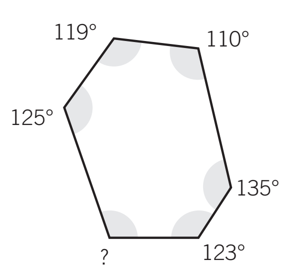


11 **Halla el valor del ángulo que falta en cada caso.**

a)



b)

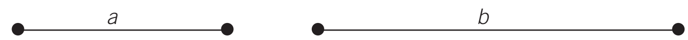


RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

La razón de dos segmentos es el número que resulta de dividir sus longitudes.

EJEMPLO

Sean los segmentos *a* y *b*, de longitudes 3 cm y 5 cm. Halla su razón.



La razón de a y b es: $\frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

12 **Dibuja dos segmentos, *m* y *n*, de longitudes 3 cm y 4 cm, respectivamente. Halla su razón.**

13 **La razón de dos segmentos, *a* y *b*, es 0,5. Si *a* mide 2 cm, calcula el valor de *b*. Dibuja los segmentos.**

$\frac{a}{b} = 0{,}5 \quad \frac{2}{b} = 0{,}5$

14 **La razón de dos segmentos, *m* y *n*, es 0,75. Si *n* mide 4 cm, calcula el valor de *m*. Dibuja los segmentos.**

$\frac{m}{n} = 0{,}75$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Si la razón de dos segmentos, a y b, es la misma que la de otros dos segmentos, c y d, se dice que los segmentos son proporcionales, se escribe: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.

15 **Los segmentos *a* y *b* miden 3 cm y 4 cm, y los segmentos miden *c* y *d*, 6 cm y 8 cm.**
Dibújalos y comprueba que son proporcionales.

16 **Dos segmentos, *a* y *b*, miden 4 cm y 5 cm y son proporcionales a otros dos segmentos *c* y *d*.**
Si el segmento *c* mide 8 cm, calcula el valor del segmento *d*.

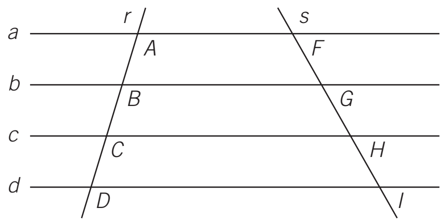
9 OBJETIVO 2
APLICAR LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA DE SEGMENTOS Y TRIÁNGULOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

SEGMENTOS IGUALES DE RECTAS PARALELAS

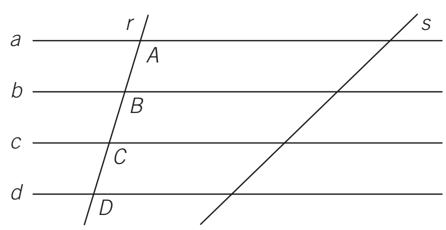
- Dibujamos cuatro rectas paralelas que estén a la misma distancia entre sí: *a*, *b*, *c* y *d*.
- Las cortamos por dos rectas secantes, *r* y *s*, que forman segmentos en ambos lados.
- Los segmentos que se originan en la recta *r* son iguales entre sí y los segmentos que se originan en la recta *s* también lo son.

EJEMPLO



Segmentos de la recta *r*: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$
Segmentos de la recta *s*: $\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI}$

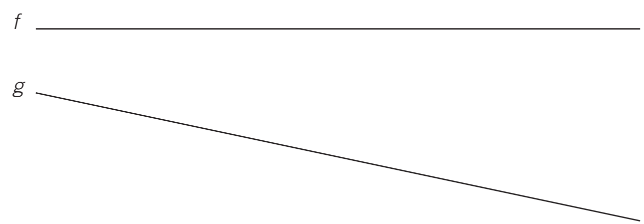
1 **Fíjate en el siguiente dibujo.**



a) Nombra los segmentos que se originan al trazar la recta *s*.
b) Verifica que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$.
c) Comprueba lo mismo para los segmentos de la recta *s*.

2 **Sobre las rectas, *f* y *g*, traza cuatro rectas paralelas que estén a una distancia de 1,5 cm entre sí.**

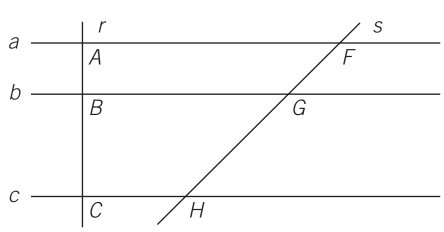
a) Nombra los segmentos que se originan al cortar las paralelas en *f* y *g*.
b) Comprueba que los segmentos que se forman en cada recta son iguales.



SEGMENTOS PROPORCIONALES DE RECTAS PARALELAS

- Dibujamos varias rectas paralelas: *a*, *b* y *c*.
- Las cortamos por dos rectas secantes, *r* y *s*, que forman segmentos en ambos lados.
- Los segmentos que originan las rectas *r* y *s* son proporcionales entre sí.

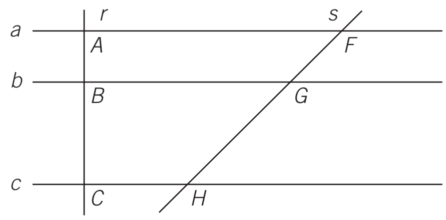
EJEMPLO



$\overline{AB}$ es a $\overline{BC}$ como $\overline{FG}$ es a $\overline{GH}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GH}}$$

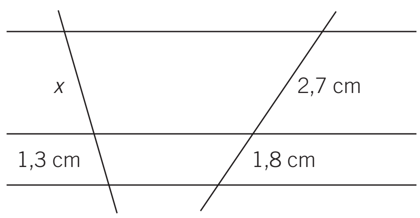
3 **Fíjate en el dibujo y halla el valor del segmento *GH*.**



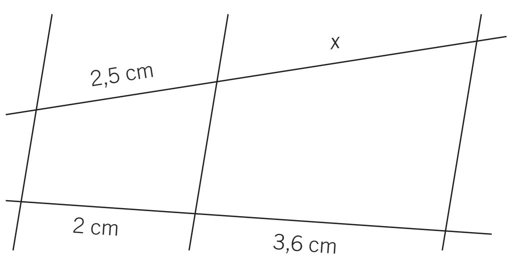
$\overline{AB} = 2$ cm $\quad \overline{FG} = 2{,}5$ cm

$\overline{BC} = 4$ cm $\quad \overline{GH} = ?$

4 **Nombra los segmentos con letras mayúsculas y las rectas con minúsculas, y calcula el valor del segmento *x*.**



5 **Calcula el valor del segmento que falta. Nombra los segmentos y las rectas.**



DIVIDIR UN SEGMENTO *AB* EN PARTES IGUALES

Seguimos estos pasos.

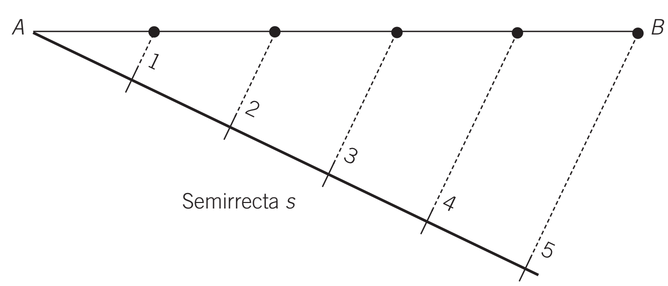
1.º Trazamos una semirrecta (*s*) con origen en *A* y señalamos en ella tantos segmentos (1-5) iguales y consecutivos (de la medida que mejor nos parezca) como partes sean.

2.º Unimos el último segmento (5) con el extremo *B*.

3.º Trazamos paralelas a este y quedan señaladas las partes iguales en *AB*.

EJEMPLO

Divide el segmento *AB* en 5 partes iguales.



6 **Divide el segmento *MN* en 7 partes iguales.**

M ——————————————————— *N*

7 **Divide un segmento de 6 cm en ocho partes iguales.**

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

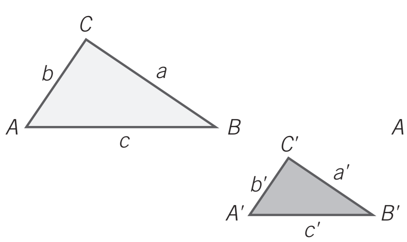
Dos triángulos son semejantes si se cumple cualquiera de estas condiciones.

1.ª Tener los **tres lados proporcionales**.
2.ª Tener los **tres ángulos iguales**.
3.ª Tener **dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual**.

EJEMPLO

Primer criterio

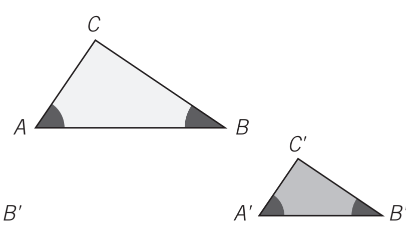
Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados proporcionales.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Segundo criterio

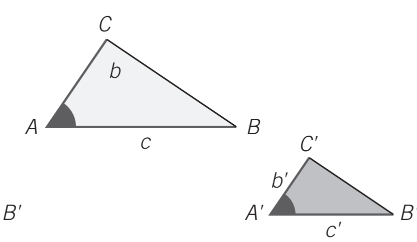
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.



$$\widehat{A} = \widehat{A}'; \widehat{B} = \widehat{B}'$$
$$\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{C}'$$

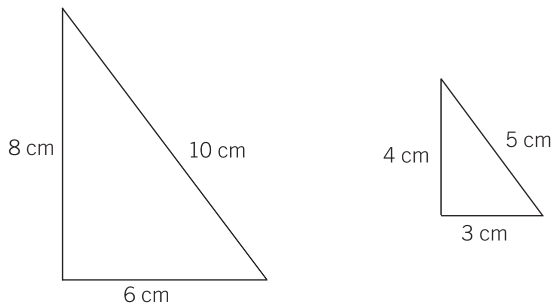
Tercer criterio

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.



$$\widehat{A} = \widehat{A}'; \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

8 **La medida de los lados de los siguientes triángulos es:**



a) Nombra los lados de cada triángulo.

b) Comprueba que son semejantes.

c) ¿Qué criterio has aplicado?

9 **En un triángulo conocemos los siguientes datos.**

Lado $AG = 4$ cm Lado $GC = 6$ cm $\widehat{G} = 60°$

Y en otro triángulo conocemos:

Lado $DE = 8$ cm Lado $EF = 12$ cm $\widehat{E} = 60°$

a) Comprueba si son semejantes.

b) Indica el criterio aplicado.

c) Realiza un dibujo representativo.

10 **Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo común que mide 40°.**

a) ¿Son semejantes? ¿Por qué?

b) Realiza un dibujo representativo.

11 **Los lados de un triángulo miden 3 cm, 5 cm y 9 cm. Indica las medidas de un triángulo semejante al primero. Razona tu respuesta y realiza un dibujo representativo.**

12 **El ángulo de un triángulo mide 75°, y los lados que lo forman, $AC = 4$ y $CD = 6$ cm. ¿Cuál de las siguientes opciones correspondería a un triángulo semejante al dado? Razona tu respuesta y realiza un dibujo representativo.**

a) Ángulo = 65°; lados $MH = 8$ cm y $HN = 10$ cm.

b) Ángulo = 75°; lados $MH = 8$ cm y $HN = 10$ cm.

c) Ángulo = 75°; lados $MH = 8$ cm y $HN = 12$ cm.

d) Ángulo = 90°; lados $MH = 8$ cm y $HN = 12$ cm.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

9 OBJETIVO 3
LEER E INTERPRETAR ESCALAS EN PLANOS Y MAPAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ESCALA DE UN PLANO O MAPA

- Las distancias y tamaños de los planos y mapas están reducidos, de manera que se pueden observar fácilmente.
- Los valores son proporcionales a la distancia o tamaño real.
- Mediante la **escala** relacionamos la distancia o el tamaño que hay en un plano o mapa con la distancia o tamaño reales.

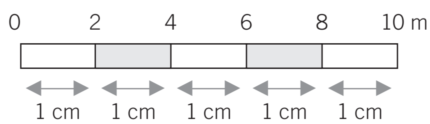
$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia o tamaño sobre el plano o mapa}}{\text{Distancia o tamaño en la realidad}}$$

EJEMPLO

Escala numérica 1 : 300

1 cm del dibujo, plano o mapa equivale a 300 cm de la realidad (300 cm = 3 m).

Escala gráfica



Según esta escala:

5 cm del dibujo, plano o mapa equivalen a 10 m de la realidad.

1 cm del dibujo, plano o mapa equivale a 2 m de la realidad.

1 **Completa la siguiente tabla.**

ESCALA	DISTANCIA EN EL MAPA O PLANO	DISTANCIA REAL (cm)	DISTANCIA REAL (m)
1 : 100			
1 : 2.000			
1 : 20.000			
1 : 350.000			
1 : 2.000.000			

2 **Expresa, mediante una escala numérica y una escala gráfica.**

a) 1 cm en el plano equivale a 2 km en la realidad.

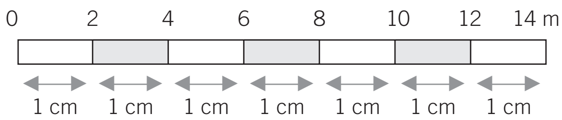
Escala numérica *Escala gráfica*

b) 1 cm en el plano equivale a 25 km en la realidad.

Escala numérica *Escala gráfica*

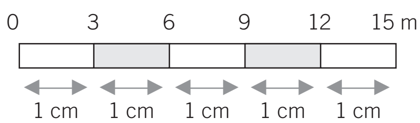
3 **Según las siguientes escalas, completa las equivalencias.**

a)



ESCALA GRÁFICA	REALIDAD (m)
1 cm	
2 cm	
5 cm	
10 cm	

b)



ESCALA GRÁFICA	REALIDAD (km)
1 cm	
3 cm	
5 cm	
12 cm	

4 **Un mapa de carreteras está elaborado a escala 1 : 200.000.**

a) ¿Qué significa esto?

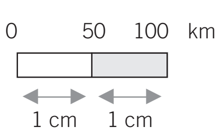
b) Una distancia de 4 cm en el mapa, ¿cuántos metros y kilómetros son en la realidad?

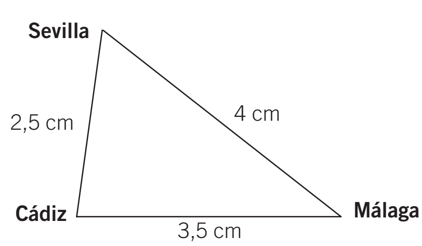
5 **El plano de una casa está dibujado a escala 1 : 100. Si una habitación en el plano mide 3 × 4 cm, ¿cuánto medirá en la realidad?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si en el plano 1 cm} \xrightarrow{\text{mide}} \text{100 cm reales}\\ \text{en el plano 3 cm} \xrightarrow{\text{medirá}} \text{x cm reales}\end{array}\right\}$$

6 **Considera la distancia en línea recta entre las siguientes ciudades en un plano. Halla la distancia real en km entre:**

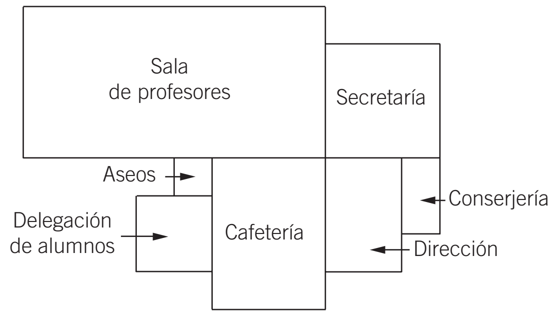
a) Sevilla-Cádiz b) Sevilla-Málaga c) Cádiz-Málaga





ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 **La planta baja del instituto viene representada por el siguiente plano.**



Calcula las medidas reales de cada dependencia, sabiendo que la escala es 1 : 400.

DEPENDENCIA	MEDIDAS EN PLANO (cm)	MEDIDAS REALES (m)
Secretaría		
Sala de profesores		
Conserjería		
Dirección		
Cafetería		
Delegación de alumnos		
Aseos		

8 **Halla la distancia que recorre Luisa para ir al instituto, si el plano está hecho a escala 1 : 4.000.**